



TITLE:

回転球殻ブシネスク熱対流問題におけるカオス解の対称性 (多重物理・多重スケール乱流現象の数理)

AUTHOR(S):

木村, 恵二; 竹広, 真一; 山田, 道夫

CITATION:

木村, 恵二 ...[et al]. 回転球殻ブシネスク熱対流問題におけるカオス解の対称性 (多重物理・多重スケール乱流現象の数理). 数理解析研究所講究録 2014, 1882: 65-75

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195662>

RIGHT:

回転球殻ブシネスク熱対流問題におけるカオス解の対称性

木村恵二*, 竹広真一†, 山田道夫‡

京都大学 数理解析研究所

Keiji KIMURA, Shin-ichi TAKEHIRO and Michio YAMADA

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

概要

回転球殻ブシネスク熱対流問題において、臨界点からレイリー数を増大させると、南北対称性を持つ熱対流解から南北非対称な熱対流解に遷移する。この遷移過程が、両側境界面の自由回転を許容する場合としない場合で異なることを見出した。半径比を 0.4, プラントル数を 1, テイラー数を 500^2 に固定し、レイリー数を $2.6 \times 10^4 \leq R \leq 3.4 \times 10^4$ の範囲で変化させた。両側境界面の自由回転を許容する場合、南北対称性を持った準周期解、カオス解を経て南北非対称なカオス解に遷移することを見出した。一方、両側境界面がともに一定回転角速度で回転する場合には、南北対称性を持ったカオス解は発現せず、南北対称性を持った準周期解から南北非対称な準周期解、カオス解に遷移することを見出した。

1 イントロダクション

恒星、巨大惑星の内部および地球型惑星の流体核などでは、内部からの発熱や外部からの冷却によって天体規模の熱対流が発生していると考えられている。回転球殻ブシネスク熱対流問題は、この天体規模熱対流現象を理解するための最も基本的な枠組みとして半世紀以上にもわたって盛んに研究されてきた。

この問題は、実際の天体を模擬するため、回転する二つの同心球の間の球殻領域のブシネスク流体を考え、中心に向く自己重力場を作用させ、内外球に温度差をつけることで熱対流を駆動させる。従来、この問題に対するほとんどの研究で、内側球と外側球の回転角速度が同じで一定である(以下、両側球が同期回転する、と呼ぶ)ことを仮定していた。しかし実際の天体を念頭においた場合、両側球が同期回転している必要はない。実際、近年の地震波観測の発展に伴い、地球内核とマントルが異なる回転角速度で回転していることが示唆されている [1, 2, 3]。熱対流と磁場との相互作用を考慮した MHD (magnetohydrodynamics) ダイナモモデルでは、対流及び磁場がつくるトルクによって内側球の差動回転を許容したモデルはいくつか存在する [4, 5, 6, 7, 8] もの、そのほとんどが内側球と外側球の回転軸が揃った状態を仮定している。両側球が 3 軸回転するモデルは熱対流のみの問題だけでなく MHD ダイナモモデルを含めてもほとんど考えられていない。

そこで我々は以前の研究で、内側球(および外側球)の 3 軸回転を許容するモデルを構築した。[9, 10]。特に内側球の自由回転を許容した場合に、臨界点から分岐する定常進行波解の分岐ダイ

*E-mail: kimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

†E-mail: takepiro@gfd-dennou.org

‡E-mail: yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

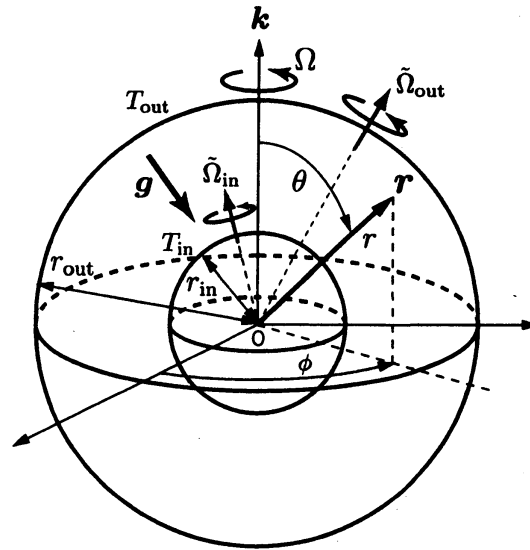


図 1: 系の設定を表す模式図.

アグラムとパターンを、両側球が同期回転する場合のそれら [11] と比較した。その結果、定常進行波解の安定領域は定量的にもほとんど変化が無く、対流パターンも定性的に変化はないことが見出された。これは、定常進行波解の安定領域が臨界曲線の近く ($R \lesssim 1.2 - 2R_c$, R_c は臨界レイリー数) のみに存在し、その安定領域内では非線形効果が強くないため、非線形効果によって駆動される内側球の回転の影響が大きいわけではないためである、と理解できた [10]。

そこで本研究では、レイリー数を定常進行波解が安定に存在する値からさらに大きくし、両側球の自由回転を許した場合の熱対流解と同期回転の場合のそれらと比較することで、内側球及び外側球の自由回転が解の振る舞いや対流パターンに及ぼす影響を調べる。特にレイリー数を増大させたとき、熱対流解が南北対称解から非対称解に遷移するが、どの程度のレイリー数でこの遷移が起こるか、またその周辺で熱対流解の性質 (準周期解, カオス解) がどのように遷移するかに注目する。これは、流体力学的な観点から、レイリー数の増大と共に熱対流解の性質がどう変化していくかを調べた研究はいくつか存在する [12, 13, 14, 15] もの、南北対称性/非対称遷移に注目した研究はほとんどなく、南北対称性が崩れる物理メカニズムが未だ知られていないためである。また我々が構築した 3 軸回転モデルがどの領域から有用性を持つかを調べる上でも重要である。

2 節では系の設定と支配方程式ならびに数値計算方法について述べる。3 節では南北対称解から南北非対称解への遷移過程を、両側球の 3 軸回転を許容した場合と両側球が同期回転する場合と比較し、さらに典型的な熱対流パターンを示す。4 節は結論および議論である。

2 系の設定と支配方程式および数値計算方法

図 1 のように、内側球、外側球の半径がそれぞれ r_{in} , r_{out} である回転球殻領域内のブシネスク流体を考える。一定回転角速度 $\Omega \mathbf{k}$ で回転する系に対して内側球、外側球がそれぞれ $\tilde{\Omega}_{in}$, $\tilde{\Omega}_{out}$ で回転しているとする。すなわち、慣性系に対して内側球、外側球がそれぞれ $\tilde{\Omega}_{in} + \Omega \mathbf{k}$, $\tilde{\Omega}_{out} + \Omega \mathbf{k}$ で回転していることを意味する。球殻領域内には一様に内部熱源 H (単位質量あたり) が分布しているとする。さらに一様な密度 ρ からなる物体の自己重力場 $\mathbf{g} = -\gamma \mathbf{r}$ が流体に作用しているとする。ここで $\gamma \equiv 4\pi G\rho/3$ は定数 (G は万有引力定数) であり、 \mathbf{r} は球の中心からの位置ベクトルである。この場合、球殻とともに回転する系での静止状態 (熱伝導状態) における温度場は

$T_s(r) = -\beta r^2/2 + T_0$ となる. ここで $\beta \equiv H/(3\kappa C_p)$, κ は熱拡散係数, C_p は定圧比熱を表し, T_0 は定数である. 球殻の厚さ $d \equiv r_{\text{out}} - r_{\text{in}}$ を長さスケール, 粘性拡散時間 d^2/ν を時間スケール, $\nu^2/(\gamma\alpha d^4)$ を温度スケールとする (ν は動粘性係数, α は熱膨張率). 圧力および慣性モーメントはそれぞれ $\rho\nu^2/d^2$, ρd^5 で無次元化する. 一定回転角速度 $\Omega \mathbf{k}$ で回転する系での無次元化された支配方程式系は, \mathbf{U} を速度場, Θ を温度攪乱場 (T_s からのずれ) として

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{U} = -\nabla \pi + \Theta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{U}, \quad (2)$$

$$P \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta \right) = R \mathbf{U} \cdot \mathbf{r} + \nabla^2 \Theta, \quad (3)$$

となる. 内側球, 外側球の運動方程式は

$$I_{\text{in}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{in}}}{dt} = N_{\text{in}}(\mathbf{U}), \quad (4)$$

$$I_{\text{out}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{out}}}{dt} = N_{\text{out}}(\mathbf{U}), \quad (5)$$

となる. I_{in} , I_{out} はそれぞれ内側球, 外側球の無次元化された慣性モーメント, N_{in} , N_{out} は内側球, 外側球に働く無次元化されたトルクを表す. ただし球の中心は動かないと仮定している. この系の無次元パラメタは以下のとおりである:

$$\eta = \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}}, \quad \tau = \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{\alpha\beta\gamma d^6}{\nu\kappa}, \quad I_{\text{in}} = \frac{I_{\text{in}}^*}{\rho d^5}, \quad I_{\text{out}} = \frac{I_{\text{out}}^*}{\rho d^5}. \quad (6)$$

η は内外球の半径比, T は系の回転の速さを表すテイラー数, P はプラントル数, R は熱的不安定性を表すレイリー数である. I_{in}^* と I_{out}^* は次元を持った内側球, 外側球の慣性モーメントである.

本研究では, 半径比およびプラントル数を標準的に用いられている値 $\eta = 0.4$, $P = 1$ に固定し, 回転の速さは $\tau = 500$ に固定する. レイリー数 R は $2.6 \times 10^4 \leq R \leq 3.4 \times 10^4$ ($4.1R_c \lesssim R \lesssim 5.3R_c$, R_c は臨界レイリー数) の範囲で変化させることにする. 内側球の慣性モーメントは, 内側球の密度が流体の密度 ρ と同じで一様と仮定した場合の値 $I_{\text{in}} = 8\pi(\eta/(1-\eta))^5/15 \simeq 0.22$ に固定する. この仮定は自己重力場の設定と矛盾しない. 外側球の慣性モーメントは地球のマントルを模擬した値である 100 を用いる.

また両側球面で不浸透・粘着境界, 温度固定の境界条件, すなわち

$$\mathbf{U}(r = r_{\text{in}}, \theta, \phi, t) = \tilde{\Omega}_{\text{in}} \times (r_{\text{in}} \mathbf{e}_r), \quad \mathbf{U}(r = r_{\text{out}}, \theta, \phi, t) = \tilde{\Omega}_{\text{out}} \times (r_{\text{out}} \mathbf{e}_r), \quad (7)$$

$$\Theta(r = r_{\text{in}}, \theta, \phi, t) = 0, \quad \Theta(r = r_{\text{out}}, \theta, \phi, t) = 0, \quad (8)$$

を用いる. ただし \mathbf{e}_r は動径方向の単位ベクトルを表す.

速度場が非発散であることから, 速度場はトロイダルポテンシャルとポロイダルポテンシャルを用いて表現できる. ただし速度場の境界条件を考慮して,

$$\mathbf{U} \equiv \nabla \times (\mathbf{r}(w + w_S)) + \nabla \times \{\nabla \times (\mathbf{r}v)\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w_S(\mathbf{r}, \tilde{\Omega}_{\text{in}}, \tilde{\Omega}_{\text{out}}) \equiv & -\frac{r_{\text{in}}^3}{r_{\text{out}}^3 - r_{\text{in}}^3} \left(r - \frac{r_{\text{out}}^3}{r^2} \right) (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Omega}_{\text{in}}) \\ & + \frac{r_{\text{out}}^3}{r_{\text{out}}^3 - r_{\text{in}}^3} \left(r - \frac{r_{\text{in}}^3}{r^2} \right) (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Omega}_{\text{out}}), \end{aligned} \quad (10)$$

とする。ただしここで w_S は式 (2) において、速度場の境界条件を満たしつつ圧力項と粘性項が釣り合う Stokes 解である (Landau and Lifshitz [16])。 v および w の境界条件は

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = w = 0 \quad \text{at } r = r_{\text{in}}, r_{\text{out}}, \quad (11)$$

となる。これらのポテンシャルを用いて支配方程式を書き直すと以下の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{L}_2 w) = & \left[\nabla^2 \hat{L}_2 + \tau \frac{\partial}{\partial \phi} \right] w - \tau \hat{Q} v + \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}_2 + \tau \frac{\partial}{\partial \phi} \right] w_S \\ & - \mathbf{r} \cdot [\nabla \times ((\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U})], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{L}_2 \nabla^2 v) = & \left[\nabla^2 \hat{L}_2 + \tau \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \nabla^2 v + \tau \hat{Q} w - \hat{L}_2 \Theta + \tau \hat{Q} w_S \\ & - \mathbf{r} \cdot [\nabla \times \nabla \times ((\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U})], \end{aligned} \quad (13)$$

$$P \frac{\partial \Theta}{\partial t} = R \hat{L}_2 v + \nabla^2 \Theta - P (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta, \quad (14)$$

$$I_{\text{in}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{in}}}{dt} = N_{\text{in}}(\mathbf{U}), \quad (15)$$

$$I_{\text{out}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{out}}}{dt} = N_{\text{out}}(\mathbf{U}). \quad (16)$$

ここで \hat{L}_2 , \hat{Q} は天頂角 (余緯度) θ と方位角 (経度) ϕ を用いて

$$\hat{L}_2 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (17)$$

$$\hat{Q} \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} \left[\hat{L}_2 (\mathbf{k} \cdot \nabla) + (\mathbf{k} \cdot \nabla) \hat{L}_2 \right], \quad (18)$$

と表される演算子である。

式 (12)–(16) および (11) を数値的に解くためにガレルキンスペクトル法を用いる。従属変数 v , w , Θ を、動径方向にはチェビシェフ多項式を境界条件を満たすように組み合わせた関数系で展開し、立体角方向には球面調和関数で展開する。

時間積分を行う際には、拡散項にクランク・ニコルソンスキーム、それ以外の項については 2 次アダムス・バッシュフォーススキームを用いる。チェビシェフ多項式の最高次数を $N = 42$ 、球面調和関数の切断波数を $L = 42$ とする。非線形項の評価は変換法を用いる。ただしエイリアスエラーを除去するため、変換法に用いる格子点数を $(N_r, N_\theta, N_\phi) = (65, 64, 128)$ とする。ここで N_r は動径方向、 N_θ は天頂角 (余緯度) 方向、 N_ϕ は方位角 (経度) 方向の格子点数を表す。

初期値として、 $\Omega = \tau/2 (= 250)$ で回転する系に対し、両側球および流体は静止し、温度攪乱場のみに乱数を与えた状態を選択する。

3 数値計算結果

3.1 遷移ダイアグラム

臨界点からレイリー数を増大させると、熱対流解は南北対称解から南北非対称解へと遷移する。ただしここで解の南北対称/非対称性を次で定義する。熱対流解 (\mathbf{U}, Θ) が以下の上側の符号を満たす。

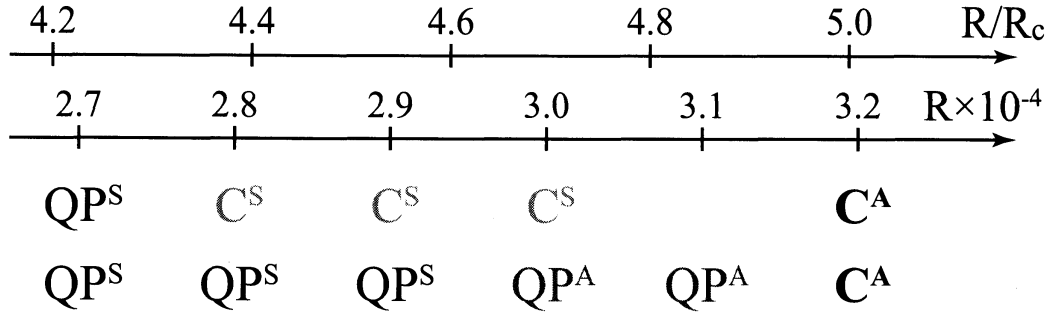


図 2: 各レイリー数 R での熱対流解の性質. 上行は両側球の 3 軸回転を許容した場合, 下行は両側球が同期回転する場合. QP^S : 南北対称な (準) 周期解, QP^A : 南北非対称な (準) 周期解, C^S : 南北対称なカオス解, C^A : 南北非対称なカオス解. ただし $R_c = 6387$ は臨界レイリー数を表す.

たすとき南北対称と呼び, 下側の符号を満たすとき南北反対称と呼ぶ:

$$\begin{aligned} U_r(r, \theta, \phi) &= \pm U_r(r, \pi - \theta, \phi), \\ U_\theta(r, \theta, \phi) &= \mp U_\theta(r, \pi - \theta, \phi), \\ U_\phi(r, \theta, \phi) &= \pm U_\phi(r, \pi - \theta, \phi), \\ \Theta(r, \theta, \phi) &= \pm \Theta(r, \pi - \theta, \phi). \end{aligned}$$

もし熱対流解が南北対称成分のみで構成されている場合は熱対流解が南北対称であると呼び, 熱対流解が南北対称成分と南北非対称成分の両方で構成されている場合は南北非対称であると呼ぶことにする.

図 2 はレイリー数が $2.7 \times 10^4 \leq R \leq 3.2 \times 10^4$ の範囲での熱対流解の遷移ダイアグラムである. QP^S は南北対称な (準) 周期解, QP^A は南北非対称な (準) 周期解, C^S は南北対称なカオス解, C^A は南北非対称なカオス解を表す. 両側球の自由回転を許した場合, 熱対流解はレイリー数の増大と共に $QP^S \rightarrow C^S \rightarrow C^A$ と遷移する. これに対し, 両側球が同期回転する場合は, レイリー数の増大と共に $QP^S \rightarrow QP^A \rightarrow C^A$ と遷移する. さらに, 両側球の自由回転を許した場合は, 両側球が同期回転する場合と比較してより小さいレイリー数でカオス解が発現する. 一方, 南北非対称解が発現するレイリー数は, 両側球が同期回転する場合の方が小さくなっている. 内側球の自由回転のみを許容した場合 ($\tilde{\Omega}_{out} \equiv 0$), 遷移ダイアグラムは両側球の自由回転を許容した場合と全く同じであることが見出された. 従って本研究のパラメタ領域では, レイリー数の増大に伴う熱対流解の遷移過程の変化は, 内側球の自由回転によって引き起こされていると考えられる.

注意したいのは, この南北対称解から非対称解への遷移は, 熱伝導解の不安定性に伴う南北反対称解の発現では説明できないことである. 熱伝導解は両側球が同期回転する場合も 3 軸回転を許容した場合も $R = 14023$ で南北反対称モードを伴う不安定化が起こる.

3.2 典型的パターン

この節ではレイリー数が $R = 2.6 \times 10^4$ (両側球の自由回転を許容した場合も両側球が同期回転している場合も熱対流解は QP^S), $R = 3.0 \times 10^4$ (両側球の自由回転を許容した場合は C^S , 両側球が同期回転している場合は QP^A), $R = 3.4 \times 10^4$ (両方の場合に C^A) の場合の典型的な熱対流パターンを示す.

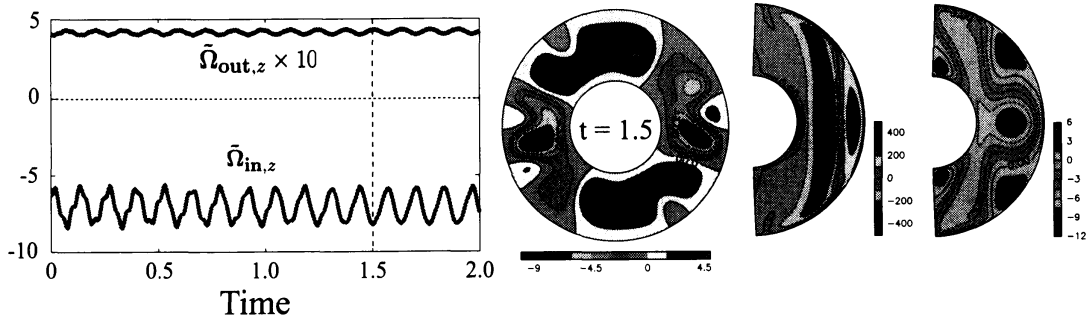


図 3: 両側球の自由回転を許容した場合の, $R = 2.6 \times 10^4$ における QP^S 解の典型的な時系列とパターン. (最左図): 内側球, 外側球の回転角速度の回転軸方向成分 ($\tilde{\Omega}_{in,z} \equiv \mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{in}$, $\tilde{\Omega}_{out,z}$) の時系列. (右三図): $t = 1.5$ における赤道断面の流れ関数 $-r(\partial v / \partial \phi)$, 子午断面における渦度場回転軸方向成分 $\omega_z \equiv \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U})$, および平均帯状流 $\langle U_\phi \rangle$.

両側球の自由回転を許した場合, $R = 2.6 \times 10^4$ では QP^S (南北対称性をもつ (準) 周期解) 解が発現する. 実際, 解が南北対称性をもっているため両側球の回転角速度の, 系の回転軸に垂直な成分はゼロとなっている. 内側球および外側球の回転角速度の回転軸方向成分は準周期的に振動している: $\tilde{\Omega}_{in,z} = -7.0 \pm 1.5$, $\tilde{\Omega}_{out,z} = +0.42 \pm 0.017$ (図 3 最左図). 図 3 の左 2 番目図より, この QP^S 解では方位角方向の波数 $m = 2$ が支配的であることが見出された. 実際, 運動エネルギー密度全体の 63% を $m = 2$ の成分が占めている. また図 3 の右 2 番目図より, 対流渦は系の回転軸方向に伸びていることが分かる. これは系の回転が速い場合の臨界モードの典型的な構造である [17]. また図 3 の最右図より, 強い retrograde (系の回転と逆方向) な平均帯状流 $\langle U_\phi \rangle$ (速度の方位角方向成分の方位角方向平均, $\langle \cdot \rangle$ は方位角方向平均を表す) が赤道面球殻中央付近に生成されており, 外側球中緯度付近に強い prograde (系の回転と同方向) な平均帯状流が生成されていることが分かる. この対流パターンは徐々に retrograde に伝播している (平均伝播速度 \bar{v}_p は $\bar{v}_p \simeq -2.0$, ただし $\bar{\cdot}$ は時間平均を表す).

両側球が同期回転する場合の, $R = 2.6 \times 10^4$ で発現する QP^S 解の振る舞いや対流パターンは, 上述の両側球の自由回転を許容した場合の $R = 2.6 \times 10^4$ で発現する QP^S 解のそれらと定性的に変化はない. すなわち, パターンは準周期的に振動しつつ retrograde に伝播 ($\bar{v}_p \simeq -1.5$) し, そのパターンは方位角方向の波数 $m = 2$ が支配的である. また両側球が同期回転する場合の, $R = 3.0 \times 10^4$ で発現する QP^A 解の振る舞いや対流パターンも, 上述の両側球の自由回転を許容した場合の $R = 2.6 \times 10^4$ で発現する QP^S 解のそれらと定性的に変化はない (ただし $\bar{v}_p \simeq -2.1$). これは QP^S 解の南北反対称成分の運動エネルギー密度が全運動エネルギー密度の 1% にも満たないことと整合的である.

両側球の自由回転を許した場合, レイリー数を $R = 3.0 \times 10^4$ まで増大させると, C^S 解が発現する (図 4). 内側球の回転角速度の回転軸方向成分 $\tilde{\Omega}_{in,z}$ は平均的に負の値 ($\overline{\tilde{\Omega}_{in,z}} = -5.2$) であるが, 時々急に加速され正の値をとることがある (例えば $t = 0.2$). 外側球の回転角速度の回転軸方向成分 $\tilde{\Omega}_{out,z}$ は常に正 ($\overline{\tilde{\Omega}_{out,z}} = +0.40$) であるが, 内側球の急な加速と同時期に急に減速し, $+0.2$ 程度の値をとることがある.

$\tilde{\Omega}_{in,z} < 0$ のときは方位角方向波数 $m = 2$ の構造が支配的であり, $t = 2.0$ では全運動エネルギー密度のうち, $m = 2$ の成分が約 58% を占める. そのとき対流渦は回転軸方向に伸びた構造をしている (図 4 右上 2 番目図). また強い retrograde な平均帯状流が赤道面の球殻中程に生成され, 強い prograde な平均帯状流が中緯度外側球付近に生成される (図 4 の最右上図). これら

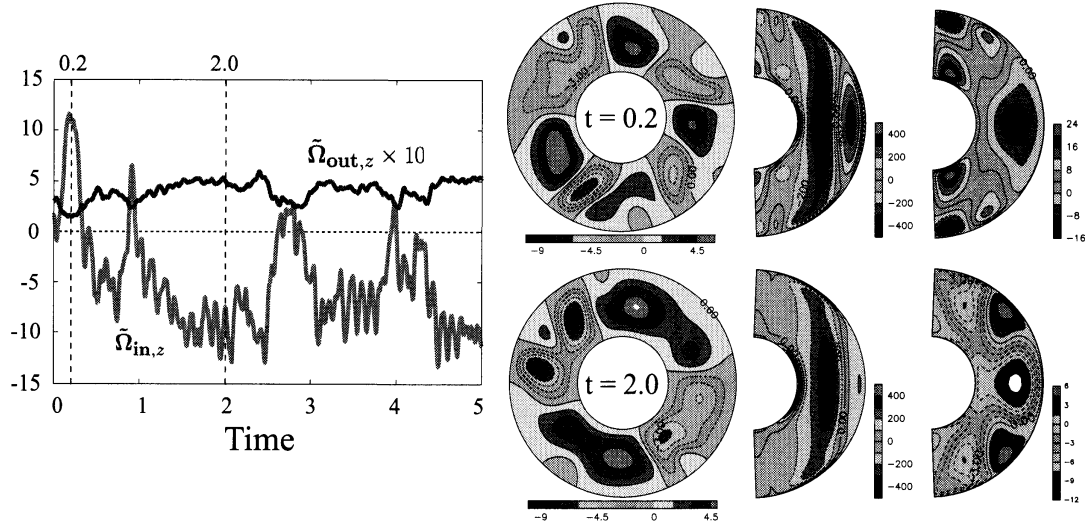


図 4: 両側球の自由回転を許容した場合の, $R = 3.0 \times 10^4$ における C^S 解の典型的な時系列とパターン. 右上 3 図は $t = 0.2$ における対流パターン, 右下 3 図は $t = 2.0$ における対流パターンを表す (図 3 と同じ).

$\tilde{\Omega}_{in,z} < 0$ の場合の C^S 解の振る舞いは, 図 3 に示した QPS 解 ($R = 2.6 \times 10^4$) の振る舞いと定性的に同じである.

一方, 例えば $t = 0.2$ の場合の様に内側球が急に加速されて $\tilde{\Omega}_{in,z} > 0$ となる (同時に外側球は減速する) とき, 経度方向波数 $m = 2$ が支配的な構造とはならない. $t = 0.2$ の場合は $m = 4$ と $m = 5$ の構造が大きいことが分かる (図 4 の右下二番目図). また強い prograde な平均帯状流が内側球の極付近に生成され, 強い retrograde な平均帯状流が外側球の極付近と赤道面の球殻中程に生成される (図 4 の最右下図). これら, 内側球が急に加速されときの C^S 解の振る舞いは, QPS 解の振る舞いとは全く異なることが見出された.

両側球の 3 軸回転を許容した場合, レイリー数をさらに増大させると, $R = 3.4 \times 10^4$ では C^A 解が発現する (図 5). $\tilde{\Omega}_{in,z}$ は平均的に負 ($\overline{\tilde{\Omega}_{in,z}} = -4.1$) の値をとるが, 時々急に加速され正の値をとることがある (例えば $t = 3.9$). 外側球の回転角速度の回転軸方向成分 $\tilde{\Omega}_{out,z}$ は常に正 ($\overline{\tilde{\Omega}_{out,z}} = +0.38$) であるが, 内側球の急な加速と同時期に急に減速し, 0 程度の値をとることがある. 対流解が南北非対称となっているため, 内側球の回転角速度の回転軸方向に垂直な成分 $\tilde{\Omega}_{in,x}$ および $\tilde{\Omega}_{in,y}$ も値をもつ. これらはゼロのまわりで変動しており, その振幅は $\tilde{\Omega}_{in,z}$ に比べて小さい ($\tilde{\Omega}_{in,x}$, $\tilde{\Omega}_{in,y}$ の標準偏差はともに 0.5 程度). 実際, 全運動エネルギー密度に対する南北反対称成分の運動エネルギー密度は 12% 程度を占めるのみとなっている. ただし, 時間平均した平均帯状流 (図 5 最右下図) がほぼ南北対称なパターンであることから, 南北反対称成分の変動は北半球と南半球で同程度であることが分かる.

$\tilde{\Omega}_{in,z} < 0$ のとき, C^A 解の振る舞いは定性的に QPS 解と同じである. すなわち, 例えば $t = 2.2$ の場合, 方位角方向波数 $m = 2$ の構造が支配的 (図 5 一列目左二番目図) であり, 平均帯状流の構造 (図 upper rightmost panel in Fig. 5 最右上図) も, 南北非対称になっているものの, 定性的に QPS 解のそれと類似している. 一方, $\tilde{\Omega}_{in,z} > 0$ の場合, C^A 解の振る舞いは QPS 解の振る舞いと大きく異なり, C^S 解の $\tilde{\Omega}_{in,z} > 0$ の時の振る舞いと定性的に同じである. 例えば $t = 3.9$ の場合, 方位角方向波数 $m = 4$ と $m = 5$ の構造が支配的 (図 5 二列目左二番目図) であり, 強い prograde な平均帯状流が高緯度内側球付近に生成され, 強い retrograde な平均帯状流が南極外側

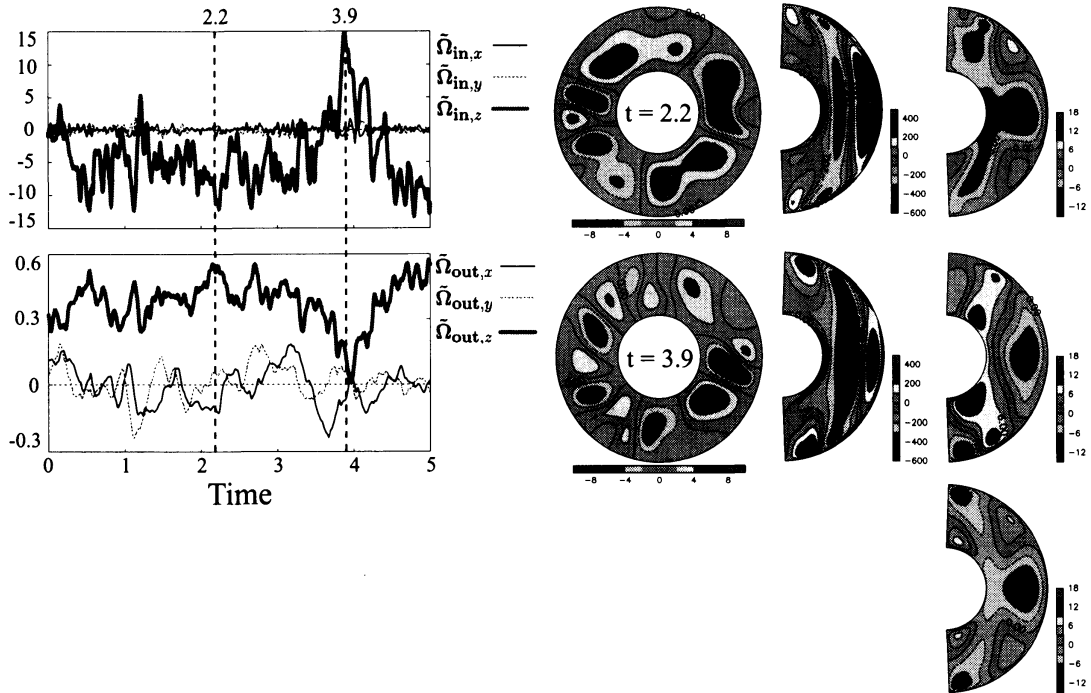


図 5: 両側球の自由回転を許容した場合の, $R = 3.4 \times 10^4$ における C^A 解の典型的な時系列とパターン. (一列目最左図): 内側球の回転角速度 $\tilde{\Omega}_{in}$, (二列目最左図): 外側球の回転角速度 $\tilde{\Omega}_{out}$, (一列目右 3 図): $t = 2.2$ における対流パターン, (二列目右 3 図): $t = 3.9$ における対流パターン, (最右下図): 時間平均した平均帯状流 $\overline{\langle U_\phi \rangle}$. 対流パターンは図 3 と同じものを示している.

球付近と赤道面外側球付近に生成されている (図 5 二列目最右図).

最後に, 両側球が同期回転するときの $R \geq 3.2 \times 10^4$ で発現する C^A 解の振る舞いは, 両側球が 3 軸回転する場合の C^A 解の振る舞いと定性的に同じである.

4 結論及び議論

レイリー数の増大と共に熱対流解が南北対称解から非対称解に移る過程を, 両側球が同期回転する場合と両側球が熱対流によるトルクを受けて 3 軸回転できる場合で調べて比較し, 両側球の回転が熱対流解に及ぼす影響を調べた. ただし両側球面で不浸透, 滑りなし, 温度固定境界条件の下, パラメタを, 内側球と外側球の半径比 $\eta = 0.4$, プラントル数 $P = 1$, 回転の速さ $\tau = 500$, 内側球の慣性モーメント $I_{in} \simeq 0.22$, 外側球の慣性モーメント $I_{out} = 100$ と選んだ. 両側球の 3 軸回転を許容した場合, レイリー数を $2.6 \times 10^4 \leq R \leq 3.4 \times 10^4$ の範囲で増大させると, 熱対流解は $QP^S \rightarrow C^S \rightarrow C^A$ と遷移する. 一方, 両側球が同期回転する場合, レイリー数の増大と共に熱対流解は $QP^S \rightarrow QP^A \rightarrow C^A$ と遷移する (図 2). 内側球のみ 3 軸回転を許容した場合 ($\tilde{\Omega}_{out} = 0$) も, 遷移過程は両側球の 3 軸回転を許容した場合と全く同じとなることを見出した. 従って, この南北対称解から非対称解への遷移過程の変化は内側球の 3 軸回転によって引き起こされていることが見出された. これは外側球の慣性モーメントが 100 と, 流体と内側球の慣性モーメントの和の約 5 倍に設定し, 外側球の回転角速度の変化が小さいためであると考えられる.

両側球の 3 軸回転を許した場合, $R = 2.6 \times 10^4$ では QP^S 解が発現する (図 3). 内側球は retrograde に回転, 外側球は prograde に回転しており, 方位角方向波数 $m = 2$ が支配的であ

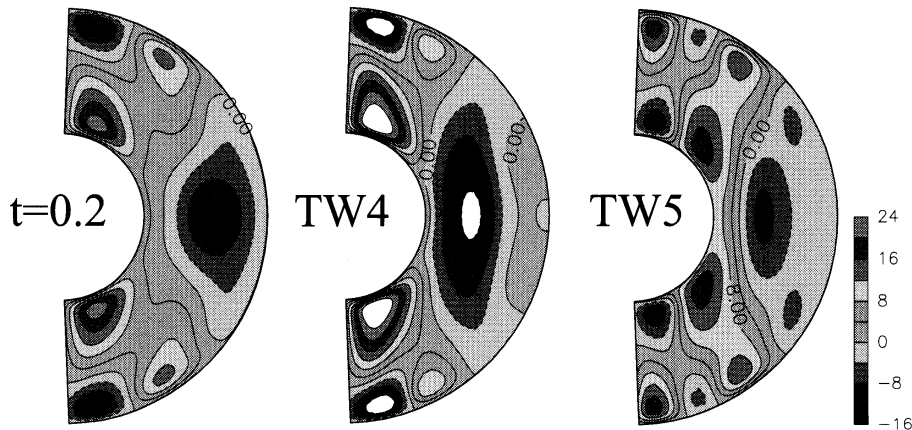


図 6: 平均帯状流の分布 ($R = 3.0 \times 10^4$). (最左): 臨界点から超臨界分岐する, 方位角方向に伝播する定常進行波 TW4 (内側球の自由回転のみ許容), (中央): 熱伝導状態から超臨界分岐する, 方位角方向に伝播する定常進行波 TW5 (内側球の自由回転のみ許容), (最右): $t = 0.2$ における C^S 解 (図 4 一列目最右図と同じ).

る.¹ レイリー数を $R = 3.0 \times 10^4$ まで増大させると, C^S 解が発現する (図 4). 内側球は平均して retrograde に回転しているが, 時々急に加速して正の値をとることがある. 一方外側球は常に prograde に回転している. $\tilde{\Omega}_{in,z} < 0$ のとき, C^S 解の対流パターンは $R = 2.6 \times 10^4$ での QPS 解と定性的に同じ振る舞いをするが, $\tilde{\Omega}_{in,z} > 0$ のとき, それらの対流パターンは全く異なる. $R = 3.4 \times 10^4$ での C^A 解 (図. 5) は定性的に $R = 3.0 \times 10^4$ での C^S 解と同じ振る舞いをする. これは C^A 解の南北反対称成分の振幅が南北対称成分に比べて小さいためであると考えられる.

我々は, C^S 解 ($R = 3.0 \times 10^4$) と C^A 解 ($R = 3.4 \times 10^4$) の $\tilde{\Omega}_{in,z} < 0$ での振る舞いが QPS 解 ($R = 2.6 \times 10^4$) と定性的に変化がないことから, $\tilde{\Omega}_{in,z} < 0$ の場合は不安定な QPS 解の周辺をさまよっていると考えている.

一方, 急な内側球の加速と対流パターンの変化は, 熱伝導解から超臨界分岐する定常進行波解に近づいているということでは理解できるのではないかと考えている. 図 6 は, 内側球のみ自由回転を許した場合の, 定常進行波解 TW4 と TW5 の平均帯状流分布 ($R = 3.0 \times 10^4$) を, C^S ($R = 3.0 \times 10^4$, $t = 0.2$) の平均帯状流と比較したものである². ただしここで TW4 (TW5) とは, 方位角方向の基本波数が 4 (5) である, 方位角方向に伝播する定常進行波解であり, これらは共に熱伝導解から超臨界分岐する. 特に TW4 は熱伝導解が不安定化して最初に分岐する解である ($R_c = 6387$, TW5 は $R = 6585$ から超臨界分岐). ただし $R = 3.0 \times 10^4$ では TW4, TW5 共に不安定となっている. この図から, C^S 解において内側球が急に加速して prograde に回転しているときの平均帯状流の分布は, TW4 や TW5 の平均帯状流分布と似た構造をしていることが分かる. 特に内側球の prograde 回転を誘起していると考えられる両極内側球付近の強い prograde な平均帯状流がよく一致している.

以上から, 本論文で示した C^S 解や C^A 解の振る舞いは, 不安定な QPS 解の周辺をうろつくが時々 QPS から離れて不安定な TW4 や TW5 に接近し, 再び QPS の周辺に戻ってくる, と理解できると我々は考えている. 更なる定量的な議論が今後の課題である.

¹この波数は臨界方位角方向波数 $m_c = 4$ よりも小さい値となっている. [10]

²TW4 の求解法及び分岐後のパターンの詳細については Kimura *et al.* [9, 10] を参照されたい.

謝辞

この研究は文部科学省の GCOE プログラム “数学のトップリーダーの育成-コア研究の深化と新領域の開拓” による支援を受けている. 計算機資源として京都大学情報メディアセンター (IMCC) の大型計算機 HX600 クラスタおよび京都大学数理解析研究所の高速計算機システムを用いた. 支配方程式の数値時間積分の際, スペクトル変換ライブラリ “ISPACK” (<http://www.gfd-dennou.org/library/ispack/>) と Fortran90 ラッパーライブラリ “SPMODEL” (<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>) を用いた. データ入出力ルーチンとして “gtool5” (<http://www.gfd-dennou.org/library/gtool/>) を用い, データ解析及び可視化には電脳 Ruby プロジェクト (<http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/>) のソフトウェア “Gphys” を用いた.

参考文献

- [1] J. Tromp, “Inner-core anisotropy and rotation,” *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **29**, 47 (2001).
- [2] A. Souriau, R. Garcia and G. Poupinet, “The seismological picture of the inner core: structure and rotation,” *C.R.Geoscience*, **335**, 51 (2003).
- [3] J. Zhang, X. Song, Y. Li, P. G. Richards, X. Sun and F. Waldhauser, “Inner core differential motion confirmed by earthquake waveform doublets,” *Science*, **309**, 1357 (2005).
- [4] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, “A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle,” *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 63 (1995).
- [5] J. Aurnou and P. Olson, “Control of inner core rotation by electromagnetic, gravitational and mechanical torques,” *Phys. Earth Planet. Inter.*, **117**, 111 (2000).
- [6] R. Hollerbach, “A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **32**, 773 (2000).
- [7] U. R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G. A. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht, K. Zhang, “A numerical dynamo benchmark,” *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25 (2001).
- [8] J. Aubert and M. Dumberry, “Steady and fluctuating inner core rotation in numerical geodynamo models,” *Geophys. J. Int.*, **184**, 162 (2011).
- [9] 木村恵二, 竹広真一, 山田道夫, “回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題の安定性と分岐構造及び熱対流が両側球に及ぼす影響”, 京都大学数理解析研究所 講究録 **1822**, pp.7-13 (2013).
- [10] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, “Stability and a bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell allowing rotation of the inner sphere,” (2013, submitted).

- [11] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, "Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell," *Phys. Fluids*, **23**, 074101 (2011).
- [12] M. Ardes, F. H. Busse and J. Wicht, "Thermal convection in rotating spherical shells," *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **99**, 55 (1997).
- [13] A. Tilgner and F. H. Busse, "Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells," *J. Fluid Mech.*, **332**, 359 (1997).
- [14] E. Grote and F. H. Busse, "Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells," *Fluid Dynamics Research*, **28**, 349 (2001).
- [15] R. Simitev and F. H. Busse, "Patterns of convection in rotating spherical shells," *New Journal of Physics*, **5**, 97.1 (2003).
- [16] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Fluid Mechanics, Second edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)," Butterworth-Heinemann (1987).
- [17] F. H. Busse, "Thermal instabilities in rapidly rotating systems," *J. Fluid Mech.*, **44**, part3, 441 (1970).